UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE

ISTITUTO DI ECONOMETRIA E MATEMATICA
PER LE DECISIONI ECONOMICHE

Carlo Felice Manara

OSSERVAZIONI SUL MODELLO DI SRAFFA

Milano - Largo Gemelli, 1

Carlo Felice Manara

OSSERVAZIONI SUL MODELLO DI SRAFFA

CONTRIBUTI DI RICERCA
DELL'ISTITUTO DI ECONOMETRIA E MATEMATICA.

ANNO 1995 **NUMERO 1**

OSSERVAZIONI SUL MODELLO DI SRAFFA

Carlo Felice Manara
Università Cattolica, Milano

Summary. Some observations on Sraffa's model are formulated.

§ 1 - In alcune recenti note[1] ho svolto qualche considerazione a proposito della costruzione di matrici quadrate reali positive soddisfacenti a determinate condizioni. E' noto che matrici cosiffatte vengono spesso usate in teoria economica per la presentazione di modelli macro-economici lineari; alcune delle condizioni cui si accennava potrebbero essere formulate dicendo che le matrici che si vogliono costruire debbono avere tutte lo stesso autovalore massimo e gli stessi autovettori corrispondenti; questi elementi saranno richiamati nel seguito con la espressione "elementi di Frobenius" della matrice che si considera, con riferimento al matematico tedesco che ritrovò inizialmente i risultati che ci interessano.

Nelle note citate ho affermato che i risultati di quelle analisi potrebbero trovare utlizzazione nella teoria economica. Nella presente Nota tento un'applicazione di tali risultati al modello classico di P. Sraffa sulla produzione di merci per mezzo di merci[2]. E' noto che la consistenza matematica di tale modello si fonda sostanzialmente sui teoremi di Frobenius sopra citati; è lecito pensare che tale modello abbia dato origine ad una grande quantità di

---

1 C.F. Manara. Osservazioni sulla costruzione di matrici quadrate soddisfacenti a particolari condizioni. Economia politica. a.IX, n.3, dicembre 1994 e C.F. Manara. Costruzione di matrici quadrate soddisfacenti a particolari condizioni, in corso di pubblicazione in Benessere, Equilibrio e Sviluppo - Studi in onore di Siro Lombardini, vol. III, a cura di T. Cozzi, P.C. Nicola, L. Pasinetti e A. Quadrio Curzio, Milano, Vita e Pensiero, 1995.

2 Piero Sraffa. Produzione di merci per mezzo di merci.

ulteriori problemi, a vari livelli di astrazione. La nota presente è dedicata ai problemi citati, trattati al livello dell'astrazione matematica; tuttavia mi permetterò di avanzare qualche tentativo di interpretazione economica.

AVVERTENZA - Nel presente lavoro, si indicherà con n un numero naturale, maggiore di 1, che dà il numero delle merci e dei processi produttivi presi in considerazione nel modello di Sraffa; di regola le lettere maiuscole dell'alfabeto latino, come *A, B, C, D*, ecc. indicheranno delle matrici. Farà eccezione il solo simbolo "*R*", che è stato usato per indicare il massimo tasso di sovrappiù di un sistema economico, conservando il simbolo utilizzato in questo caso da P. Sraffa.

I vettori saranno indicati con lettere minuscole; gli elementi delle matrici e dei vettori saranno indicati con lettere minuscole, e distinti tra loro con indici numerici posti in basso a destra.

Un vettore, simbolizzato, come si è detto, con una lettera latina minuscola, sarà considerato come una matrice $(1,n)$, cioè una matrice con una sola riga.

Col simbolo:

$$x = [x_1, x_2, \ldots, x_n] \tag{1}$$

si indicherà che il vettore x ha come componenti i numeri reali $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Il vettore colonna [*matrice* $(n,1)$] che ha le stesse componenti di un dato vettore, per esempio x, sarà indicato con il simbolo x_T, apponendo quindi al simbolo del vettore x il simbolo "T" dell'operazione di trasposizione per le matrici. Ed analoghe notazioni saranno adottate in casi analoghi.

Considerato un vettore a ad n componenti, con il simbolo "$\hat{a}$" indicheremo la matrice quadrata di ordine n che si ottiene "diagonalizzando" il vettore a, cioè la matrice che ha tutti gli elementi uguali a 0, salvo quelli della diagonale principale, che sono uguali a quelli di posto corrispondente del vettore a.

Infine indicheremo con il simbolo s il vettore che ha n componenti tutte uguali ad 1, ponendo quindi:

$$s = [1, 1, 1, 1, \ldots, 1]. \tag{2}$$

§ 2 - Daremo qui una breve e compatta sintesi del primo e più semplice modello costruito da P.Sraffa; richiameremo i dati da cui l'Autore parte, le convenzioni che egli adotta e le deduzioni da lui svolte.

I dati di partenza possono essere presentati nel modo seguente: si considerano n merci (beni) ed n processi che le producono. I processi produttivi del sistema economico considerato vengono descritti con una matrice non singolare:

$$A = [a_{ik}] \qquad (1 \leq i, k \leq n) \quad ; \tag{3}$$

ogni elemento a_{ik} della matrice A è reale: esso rappresenta la quantità totale della merce di indice i che entra nel processo produttivo della merce di indice k. Noi supporremo che ogni elemento di A sia positivo. Si avrà quindi:

$$A > 0. \tag{4}$$

E' noto che una matrice A che soddisfa a queste ipotesi risulta di conseguenza indecomponibile.

E' dato un vettore l delle quantità di lavoro:

$$l = [l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n]; \tag{5}$$

una sua componente l_k indica la quantità di lavoro impiegata nel processo produttivo di indice k.

Esiste un vettore a che potrebbe essere chiamato "vettore dei prodotti lordi" ; una sua componente a_i indica la quantità di merce di indice i prodotta dal sistema, con l'impiego delle altre merci e del lavoro.

Si formula l'ipotesi che ogni componente di a sia positiva, cioè che sia:

$$a > 0. \tag{6}$$

Definiamo un vettore e dato da:

$$e_T = A \cdot s_T. \tag{7}$$

La componente di indice i del vettore e indica la quantità complessiva della merce i che viene impiegata nel sistema di produzione; in forza delle ipotesi e delle definizioni si ha ovviamente:

$$e > 0. \tag{8}$$

Indichiamo infine con d il vettore dato da:

$$d = a - e; \tag{9}$$

per definizione quindi la componente di indice i del vettore d fornisce la differenza tra la quantità di merce di indice i prodotta dal sistema e la quantità globale delle stessa merce impiegata nel sistema stesso. Esso potrebbe essere chiamato vettore dei prodotti netti del sistema. Si prende in considerazione il caso in cui si abbia:

$$d > 0; \tag{10}$$

la (10) significa ovviamente che la quantità di ogni merce che è prodotta supera quella che viene introdotta come mezzo di produzione; è noto che in questo caso il sistema viene chiamato "viabile": quindi la condizione (10) sarà qui chiamata anche "condizione di viabilità " del sistema.

Come conseguenza delle ipotesi formulate, un noto teorema di Frobenius garantisce l'esistenza di un numero reale positivo R e di due vettori positivi x e p tali che siano valide le relazioni:

$$\begin{gathered}(1+R)\cdot p\cdot A = p\cdot \hat{a};\\ (1+R)\cdot A\cdot x_T = \hat{a}\cdot x_T;\\ R>0 \quad ; \quad p>0 \quad ; \quad x>0.\end{gathered} \tag{11}$$

§ **3** - Si può ora osservare che le equazioni (11) sono omogenee nelle componenti dei due vettori x e p; è possibile quindi stabilire delle convenzioni per la loro normalizzazione. Tali convenzioni sono state scelte in modo da poter fare assumere una forma particolarmente sintetica e suggestiva alla classica relazione (17), dimostrata da Sraffa, che incontreremo in seguito; ma va ricordato che le convenzioni scelte da Sraffa non sono le sole possibili.

E' noto che la classica procedura di normalizzazione scelta da Sraffa si articola nel

modo seguente:
anzitutto si sceglie un fattore comune per tutte le componenti del vettore x in modo che si abbia:

$$l \cdot x_T = 1; \tag{12}$$

fissato che sia x in questo modo, si sceglie un fattore comune per tutte le componenti di p in modo che sia:

$$p \cdot [\hat{a} - A] \cdot x_T = 1. \tag{13}$$

Da questa relazione e dalle (11) discende:

$$R \cdot [p \cdot A \cdot x_T] = 1. \tag{14}$$

Sono note le interpretazioni econonomiche che sono state date ai due vettori x e p così determinati: precisamente le componenti di p sono state interpretate come prezzi delle merci, in un numerario tale da soddisfare alla (13); e le componenti di x possono essere interpretate come delle specie di "fattori di ridimensionamento" dei settori produttivi del sistema (e delle quantità di merci prodotte), in guisa tale che valga la seconda delle (11). E' noto che il sistema così ridimensionato viene da Sraffa chiamato "sistema tipo".

Quando sia stato scelto il numerario nel modo detto, e si chiami w il livello dei salari (ovviamente positivo), ancora i teoremi di Frobenius garantiscono la validità della relazione:

$$(1 + r) \cdot p \cdot A + w \cdot l = p \cdot \hat{a}, \tag{15}$$

che esprime il bilancio finanziario globale del sistema, ovviamente nel numerario scelto. In questa relazione il numero r soddisfa alle limitazioni:

$$0 < r < R, \tag{16}$$

e viene interpretato come "tasso di sovrappiù" del sistema.

Moltiplicando a destra entrambi i membri della (15) per il vettore x_T e tenendo presenti la convenzione (12) e la (14) si giunge con pochi passaggi di calcolo che non stiamo a svolgere qui alla classica relazione data da Sraffa:

$$\frac{r}{R}+w=1. \tag{17}$$

§ **4** - Si può ora osservare che gli elementi delle n colonne della matrice A dipendono ovviamente dalle tecniche utilizzate nel sistema per la produzione delle merci considerate. Pare ovvio che la variazione delle tecniche adottate nel sistema debba portare in generale anche alla variazione delle grandezze coinvolte: in particolare alla variazione delle quantità di merci introdotte e prodotte, alla variazione del numerario e del tasso di sovrappiù.

Pertanto potrebbe forse essere di qualche interesse l'analisi della possibilità di variare le tecniche che il sistema adotta per la produzione delle merci per mezzo di merci in modo tale che non vari il numerario adottato, nè il sistema dei prezzi (espressi in quel numerario), nè il vettore x dei coefficienti che conducono alla costruzione di quella che Sraffa chiama la "merce tipo", nè il tasso R massimo di sovrappiù; e quindi in modo tale che resti invariata la relazione fondamentale (17).

Lo scopo si può conseguire considerando le (11) come un sistema di equazioni lineari nelle quali le incognite sono gli elementi della matrice A. La soluzione di queste si può ottenere con l'applicazione delle procedure presentate nei lavori citati all'inizio di questa Nota, e che qui adatteremo al caso particolare del modello di Sraffa.

A tal fine, considerati i due vettori x e p sopra definiti, costruiamo due vettori, che chiameremo rispettivamente x^* e p^*, che hanno soltanto (n-1) componenti, coincidenti con le prime (n-1) componenti dei due vettori considerati; poniamo cioè :

$$x^* = [x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}] \quad ; \quad p^* = [p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}]. \tag{18}$$

Consideriamo poi una matrice B quadrata di ordine (n-1) e costruiamo la matrice D, quadrata e di ordine n, data da:

$$D = \left[\begin{array}{c|c} p_n \cdot x_n \cdot B & -p_n \cdot B \cdot x^*_T \\ \hline -p^* \cdot B \cdot x_n & p^* \cdot B \cdot x^*_T \end{array}\right] \tag{19}$$

Si verifica direttamente che, quale che sia la matrice B, per la matrice D valgono le seguenti relazioni:

$$p \cdot D = 0 \qquad ; \qquad D \cdot x_T = 0. \tag{20}$$

Costruiamo ora la matrice:

$$A^* = A + D; \tag{21}$$

come conseguenza delle (20) si ha:

$$p \cdot A^* = p \cdot A \quad ; \quad A^* \cdot x_T = A \cdot x_T. \tag{22}$$

Da queste relazioni si trae che tutte le matrici A^* fornite dalla (21), nella quale la matrice D è data dalla (19), soddisfano alle (11); quindi esse conducono alla relazione fondamentale (17); questa è dunque invariante per tutte le variazioni della matrice A, date dalla (21).

Osserviamo ora che gli elementi della matrice A^* sono funzioni continue degli $(n-1)^2$ elementi della matrice B, perchè tali sono gli elementi della D. Inoltre si ha che per B=0 è D=0 e quindi A^* coincide con A.

Consideriamo gli elementi

$$b_{ik} \quad ; \quad 1 \leq i, k \leq (n-1) \tag{23}$$

della matrice B come coordinate di punto nello spazio $\mathcal{R}^{(n-1)^2}$. La proprietà di continuità degli elementi della matrice A^*, considerati come funzioni degli elementi di B, garantisce la esistenza di un insieme aperto:

$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{R}^{(n-1)^2} \tag{24}$$

non vuoto, per i punti del quale valgono le relazioni:

$$A^* > 0 \quad ; \quad A^* \cdot s_T < a_T. \tag{25}$$

Abbiamo osservato sopra che le colonne della matrice A corrispondono alle tecniche di produzione delle singole merci; pertanto la (21), sotto le condizioni (25), fornisce la possibilità di variare le tecniche di produzione di merci mediante merci conservando il sistema viabile e gli elementi di Frobenius della matrice del sistema stesso. In altre parole, la (21) fornisce delle modifiche della matrice A che non alterano r e w, cioè la distribuzione del reddito, ed inoltre non alterano il vettore dei prezzi p ed il vettore dei coefficienti x, corrispondenti a quella data distribuzione.

§ **5** - Si possono presentare le relazioni (25) in forma diversa, esplicitando i calcoli che sono ivi rappresentati in forma simbolica; ciò si ottiene con passaggi algebrici che non presentano difficoltà concettuali; precisamente la relazione:

$$A^* > 0$$

viene tradotta nel sistema di relazioni seguenti:

I) per $i,k < n$:

$$a^*_{ik} = a_{ik} + x_n \cdot p_n \cdot b_{ik} > 0 \tag{26}$$

II) per $i<n$, $k=n$:

$$a^*_{in} = a_{in} - p_n \cdot \sum_j b_{ij} \cdot x_j > 0 \quad ; \quad j < n$$

III) per $i=n$, $k<n$:

$$a^*_{nk} = a_{nk} - x_n \cdot \sum_j p_j \cdot b_{jk} > 0 \quad ; \quad j < n$$

IV) per $i=k=n$:

$$a^*_{nn} = a_{nn} + \sum_{jt} p_j \cdot x_t \cdot b_{jt} > 0 \quad ; \quad j,t < n$$

In modo analogo, la relazione:

$$A^* \cdot s_T < a_T$$

viene tradotta con le relazioni:

V) per $i<n$:

$$\sum_k a_{ik} + p_n \cdot \sum_j b_{ij} \cdot (x_n - x_j) < a_i \quad ; \quad 1 \leq k \leq n \quad ; \quad j < n; \tag{27}$$

VI) per $i=n$:

$$\sum_k a_{nk} + \sum_{ji} p_j \cdot (x_i - x_n) \cdot b_{ji} < a_n \quad ; \quad 1 \leq k \leq n \quad ; \quad j,i < n;$$

Le (26) e (27) confermano quanto è stato già affermato, e cioè che gli elementi della matrice $A*$ sono funzioni lineari degli elementi della matrice B, e che questi ultimi possono essere scelti in modo che le relazioni (25) siano soddisfatte, ottenendo così delle matrici delle tecniche di produzione relative a sistemi viabili che hanno lo stesso tasso di sovrappiù e gli stessi vettori p ed x.

Infatti le (26) e (27) sono soddisfatte quando tutti gli elementi b_{ji} sono nulli, il che garantisce che l'insieme di cui alla (24) non è vuoto.

§ 6 - Riprendiamo ora in considerazione la (15), e ricordiamo che la relazione fondamentale (17) si ottiene dalla (15) moltiplicandone entrambi i membri a destra per x_T , e tenendo ovviamente conto delle (11), (12), (13).

Scegliamo ora un vettore z che soddisfi alla relazione:

$$z \cdot x_T = 0. \tag{27}$$

Esiste certamente un insieme di vettori z che soddisfano a questa relazione: precisamente essi costituiscono lo spazio vettoriale ad n-1 dimensioni dei vettori perpendicolari al vettore x .

Costruiamo ora il vettore:

$$l* = l + z; \tag{28}$$

ed osserviamo che, in forza della (27) si ha:

$$l* \cdot x_T = l \cdot x_T. \tag{29}$$

Ovviamente le componenti di l^* sono funzioni continue delle componenti di z, e coincidono con queste quando sia $z=0$. E quindi possibile scegliere in infiniti modi z in modo tale che si abbia:

$$l^* > 0 \tag{30}$$

e quindi il vettore l^* possa rappresentare il vettore delle forze di lavoro impiegate nel sistema.

Prendiamo ora in considerazione la relazione:

$$(1+r)\cdot p \cdot A^* + w \cdot l^* = p \cdot \hat{a}; \qquad (15)^*$$

in forza delle (22) e della (29) anche moltiplicando entrambi i membri della (15)* per x_T si giunge alla (17). Questa relazione è quindi invariante di fronte ai cambiamenti di tecniche e di distribuzione della forza-lavoro che sono espressi dalle formule (21) e (28).

Pertanto a proposito della (28) valgono osservazioni analoghe a quelle formulate alla fine del paragrafo 4, in relazione alla (21).

OSSERVAZIONE. - Le considerazioni svolte permettono di pensare che si possano escogitare delle procedure per confrontare le diverse tecniche di produzione del sistema modificato, corrispondente alla matrice A^*: si potrebbe per esempio definire una funzione $f(b_{ik})$ degli elementi della matrice B, definita nell' insieme $\mathcal{B}$, funzione che permetta di definire convenzionalmente nell'insieme una relazione di preferenza tra le tecniche.

Forse la più semplice tra le funzioni che si possono escogitare potrebbe essere ottenuta considerando un vettore $c > 0$, diverso da p, le cui componenti potrebbero essere interpretate come i prezzi delle merci del sistema in un numerario diverso da quello sopra definito.

Si avrebbe ovviamente:

$$f(b_{ik}) = c \cdot A^* \cdot s_T \tag{31}$$

e quindi i valori della funzione f così definita potrebbero essere utilizzati per confrontare convenzionalmente le differenti tecniche di produzione, corrispondenti alle differenti matrici B.

Milano, gennaio 1995.